

## A 题：音板的振动模态分析与参数识别

音乐来自乐器，乐器产生于制造，而制造需要数理逻辑。

在 20 世纪末，我国就已经形成了较为完整的乐器工业生产体系，基本可以加工世界上所有大类乐器，门类齐全，品种众多。其中，在弦乐器（例如钢琴、小提琴、吉他、二胡等）的生产过程中，音板是决定乐器音色质量的重要部件。由于弦的振动所辐射的声能量效率很低，因此琴弦通常需要带动音板振动，以提高其声能量辐射效率。音板是连续弹性薄板，受到琴弦的激励后会产生更多的振动模态，从而产生更丰富美妙的谐音。

弹性板的振动模态包含振动频率、振型等，分别是弹性算子（偏微分算子）的特征值的虚部和相应的特征向量。音板的振动模态与其几何形状和厚度，所选材质的密度、杨氏模量、剪切模量、泊松比等密切相关。本题聚焦于乐器音板的振动模态研究，要求参赛队收集常见乐器制作所用木材、金属、或某类型复合材料和新型材料的振动力学参数资料，建立数学模型，研究如下问题：

**问题 1：**考虑具有自由边界条件的方形均质音板，建立音板的振动数学模型，计算并对比大小一致材质不同的音板频率在 2000 Hz 范围内相应振动模态的频率和振型：云杉木材，某类型常用金属、某类型高新复合材料和新型材料。

**问题 2：**选择一种特定的云杉木材来制作一块厚度非均匀，且具有一定弯曲度的薄音板（具自由边界条件）。建立音板的振动数学模型，并计算附件里图所示轮廓的木材音板在 2000 Hz 的范围内相应振动模态的频率和振型。

**问题 3：**附件给出了通过特殊设备获得的某种具有自由边界条件非均质音板的 5 个模态情况，包括从小到大排列的 5 个振动频率和对应的振型图。图的颜色相同的地方代表振动方向一致，红、黄色代表该处向上振动，蓝色、绿色代表该处向下振动，暖色或冷色越深代表振动幅度越大。它们是动态曲面函数在这些振动频率上的单位范数分解，即

$$h(t, x, y) = a_0(t)\varphi_0(x, y) + \sum_{j=1} [a_j(t) \cos \omega_j t + b_j(t) \sin \omega_j t] \varphi_j(x, y)$$

其中频率 $\omega_j > 0$ 从小到大排列，理论上有无限多个，函数 $\varphi_j(x, y)$ 是对应的振型，它的平方在参考平面区域的积分等于 1。根据附件给出的 5 个频率对应的振型图描述振型函数 $\varphi_j(x, y)$ 。

**问题 4：**对附件给出的振型图轮廓形状的自由振动非均质音板，确定它的物理和厚度参数（可能随平面位置变化），使得它的前 5 个模态最接近附件给出的模态信息。对其制造材质选择给出建议。

**## 本题来源于深圳杯数学建模挑战赛**